ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ VÂN

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH LIÊN QUAN ĐẾN GIẢ THYẾT BRUCK

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ VÂN

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH LIÊN QUAN ĐẾN GIẢ THYẾT BRUCK

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - Năm 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong bài luận văn "Vấn đề duy nhất cho hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Bruck" là trung thực và không sao chép từ các đề tài khác, các thông tin trích dẫn trong luận văn có nguồn gốc rõ ràng, tôi xin chịu hoàn toàn trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2019

Người viết Luận văn

Dương Thị Vân

Xác nhận
của Trưởng khoa chuyên môn

Xác nhận
của người hướng dẫn khoa học

PGS.TS Hà Trần Phương

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới PGS.TS Hà Trần Phương, người đã chỉ bảo tận tình và trực tiếp hướng dẫn tôi trong suốt quá trình nghiên cứu để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn này.

Tôi cũng xin gửi lời biết ơn chân thành tới các thầy cô giáo dạy cao học trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Nhân dịp này tôi cũng xin chân thành cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã luôn cổ vũ, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong toàn bộ quá trình học tập.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2019

Người viết luận văn

Dương Thị Vân

Mục lục

Mở đầu

Cho f và g là các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Ta nói f và g chung nhau giá trị phức a không kể bội nếu $f^{-1}(a) = g^{-1}(a)$. Ta nói f và g chung nhau giá trị phức a kể bội nếu $E_f(a) = E_g(a)$, trong đó

$$E_f(a) = \left\{(z, m) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}^+ : \mathrm{ord}_{f-a}(x) = m\right\}.$$

Năm 1979, E. Mues and N. Steinmetz đã chứng minh: "*Với một hàm nguyên khác hằng f, nếu f và f' chung nhau hai giá trị phức phân biệt không kể bội thì đồng nhất bằng nhau*". Như một sự mở rộng tự nhiên, năm 1996, Bruck [2] đặt ra một giả thuyết khá nổi tiếng mà ta quen gọi là *giả thuyết Bruck*:

Giả thuyết Bruck. "*Cho f là một hàm nguyên khắc hằng trên $\mathbb{C}$ sao cho $\rho_2(f)$ không phải là một số tự nhiên và $\rho_2(f) < \infty$. Nếu f và f' chung nhau giá trị a kể cả bội thì $\frac{f'-a}{f-a} = c$, trong đó c là một hằng số khác 0*". Ở đây

$$\rho_2(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Trong bài báo ([2]) các tác giả đã chứng minh trong trường hợp $a = 0$. Ngoài ra Ông đã chứng minh: "*Cho f là một hàm nguyên khắc hằng trên $\mathbb{C}$. Nếu f và f' chung nhau giá trị 1 kể cả bội và $N(r, 0, f) = S(r, f)$ thì $\frac{f'-1}{f-1}$ là một hằng số khác 0*".

Về sau, có nhiều nhà toán học đã quan tâm đến việc tổng quát giả thuyết Bruck và sử dụng giả thuyết này để nghiên cứu vấn đề duy nhất. Có nhiều cách mở rộng, nghiên cứu giả thuyết Bruck cho trường hợp hàm phân hình, thay thế đạo hàm f' bằng đạo hàm cấp cao,.... Và các tác giả đã thu được nhiều kết quả.

Với mong muốn tìm hiểu về vấn đề duy nhất có liên quan đến giả thuyết Bruck, tôi chọn đề tài:"Vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đền giả thuyết Bruck".Mục đích của đề tài này là trình bày lại các kết quả nghiên cứu gần đây của A. Banerjee and B. Chakraborty [2] năm 2016 và của B. Chakraborty [3] năm 2018 về một số dạng tổng quát của giả thuyết Bruck và sử dụng nó để nghiên cứu một số kết quả về vấn đề duy nhất.

Nội dung chính của luận văn gồm có 2 chương: Chương 1 trình bày một số khiến thức cơ bản về lý thuyết Nevanlinna và các bổ đề để chứng minh một số kết quả chính trong chương 2. Chương 2 là chương chính của luận văn, trong chương này chúng tôi giới thiệu một số dạng tổng quát của giả thuyết Bruck và vấn đề duy nhất liên quan đến giả thuyết Bruck.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Các hàm Nevanlinna và tính chất

1.1.1 Một số khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. Cho hàm chỉnh hình f trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, điểm z_0 là *không điểm bội k* của f nếu tồn tại hàm chỉnh hình $h(z)$ không triệt tiêu trong một lân cận U của z_0 sao cho trong lân cận đó hàm f được biểu diễn dưới dạng:

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z).$$

Nghĩa là $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{k-1}(z_0) = 0$ và $f^k(z_0) \neq 0$ Với $z \in \mathbb{C}$, ta kí hiệu: $\mathrm{ord}_f(z_0) = k$ nếu z_0 là không điểm bội k của f và $\mathrm{ord}_f(z_0) = 0$ nếu $f(z_0) \neq 0$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho một hàm phân hình f trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ khi đó $f = \frac{f_1}{f_2}$ trong đó f_1, f_2 là hai hàm chỉnh hình. Điểm z_0 là một không điểm bội k của f nếu z_0 là một không điểm bội k của f_1, z_0 là cực điểm bội k của f nếu z_0 là một không điểm bội k của f_2.

Trong mặt phẳng $\mathbb{C}$, ta kí hiệu:

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\};$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\};$$

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\};$$

tương ứng là hình tròn mở, hình tròn đóng và đường tròn tâm z_0, bán kính r. Với $z_0 = 0$ ta kí hiệu ngắn gọn

$$\overline{D}_R = \overline{D}(0, R); \quad D_R = D(0, R).$$

Định lý 1.1.3. *(Công thức Poison-Jensen [4]) Giả sử $f(z) \not\equiv 0$ là một hàm phân hình trong đĩa đóng $\overline{D}_R, 0 < R < \infty$. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_p$ là các không điểm kể cả bội của f trong $\overline{D}_R$, $b_1, ..., b_p$ là các cực điểm kể cả bội của f trong $\overline{D}_R$. Khi đó với mỗi z trong $\{|z| < R\}$ không phải là không điểm hay cực điểm của f, ta có*

$$\begin{aligned}\log|f(z)| =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z^2|} \log\left|f(Re^{i\varphi})\right| d\varphi \\ & - \sum_{i=1}^{p} \log\left|\frac{R^2 - \overline{a}_i z}{R(z - a_i)}\right| - \sum_{j=1}^{q} \log\left|\frac{R^2 - \overline{a}_j z}{R(z - a_j)}\right|.\end{aligned}$$

Với mỗi số thực $x > 0$, ta kí hiệu

$$\log^+ x = \max\{\log x, 0\}.$$

Khi đó $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.

Bây giờ ta định nghĩa hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng của hàm phân hình.

Cho f là một hàm phân hình trong $\overline{D}_R$ và một số thực $r > 0$, trong đó $0 < R \leq \infty, r < R$. Dễ thấy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi.$$

Định nghĩa 1.1.4. ([4]) Hàm

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm f.

Kí hiệu $n(r, \frac{1}{f})$ là số không điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, \frac{1}{f})$ là số không điểm không kể bội của f, $n(r, f)$ là số cực điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, f)$ là số cực điểm không kể bội của f trong $\overline{D}_r$, $n_k(r, f)$ là số cực điểm bội cắt cụt bởi k của f (tức là cực điểm bội $l > k$ chỉ được tính k lần trong tổng $n_k(r, f)$ trong $\overline{D}_r$.

Định nghĩa 1.1.5. ([4]) Hàm

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f)\log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* của f (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm).

Hàm

$$\overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(r, f) - \overline{n}(0, f)}{t} dt + \overline{n}(0, f)\log r$$

là *hàm đếm không kể bội*. Hàm

$$N_k(r, f) = \int_0^r \frac{n_k(t, f) - n_k(0, f)}{t} dt + n_k(0, f)\log r$$

là *hàm đếm bội cắt cụt* bởi k, trong đó $n(0, f) = \lim_{t\to 0} n(t, f); \overline{n}(0, f) = \lim_{t\to 0} \overline{n}(t, f); n_k(0, f) = \lim_{t\to 0} n_k(r, f)$. Số k trong $n_k(r, f)$ là chỉ số bội cắt cụt.